

## IMPLICITNÍ FUNKCE

V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu  $[x_0, y_0]$  implicitně zadanou funkci (proměnné  $x$ ). Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě  $x_0$ .

1.  $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ ,  $[2, 0]$
2.  $\sin(xy) + \cos(xy) = 1$ ,  $[\pi, 0]$
3.  $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ ,  $[1, 0]$
4.  $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$ ,  $[0, 0]$
5.  $\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0$ ,  $[0, 0]$
6.  $x^y + y^x = 2y$ ,  $[1, 1]$
7.  $y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0$ ,  $[0, 0]$
8.  $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$ ,  $[0, 0]$
9.  $\frac{\pi}{2} + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$ ,  $[0, 0]$
10. Dokažte, že množina bodů  $[x, y, z] \in \mathbb{R}$ , které splňují vztah  $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$  je v okolí bodu  $[1, 1, 1]$  popsatelna jako graf funkce  $f(x, y)$  definované na jistém okolí bodu  $(1, 1)$ , pro kterou je  $f(1, 1) = 1$ . Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce  $f$  v tomto bodě.
11. Spočítejte parciální derivace funkce  $z$  v bodě  $[0, 1]$ , která je implicitně zadaná rovnicí  $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$  a splňuje  $z(0, 1) = 1$ .

V následujících úlohách ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu  $[x_0, y_0, u_0, v_0]$  implicitně zadané funkce  $u, v$  (proměnných  $x, y$ ). Spočítejte obě parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě  $[x_0, y_0]$ .

12.  $x = u \cos \frac{v}{u}, y = u \sin \frac{v}{u}$ ,  $[1, 0, 1, 0]$
13.  $x = e^u + u \sin v, y = e^u - u \cos v$ ,  $[e + 1, e, 1, \pi/2]$

## VÝSLEDKY

### 2. Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce  $F$  je definována na  $\mathbb{R}^2$  a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na  $\mathbb{R}^2$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ . Dále platí  $F(\pi, 0) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[\pi, 0]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) &= 1, \\ \cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) &= 0, \\ -\sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) &= 0, \\ -\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = \pi$  a použijeme-li  $\varphi(\pi) = 0$ , dostaneme  $\varphi'(\pi) = 0$  a  $\varphi''(\pi) = 0$ .

### 3. Položme

$$F(x, y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Funkce  $F$  je definována na  $\mathbb{R}^2$  a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= 8x^3y + 3x^2 + y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= 2x^4 + 3y^2 + x. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na  $\mathbf{R}^2$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ . Dále platí  $F(1,0) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[1,0]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítáme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} 2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 &= 0, \\ 8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) &= 0, \\ 24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x) \\ + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 1$  a použijeme-li  $\varphi(1) = 0$ , dostaneme  $\varphi'(1) = -1$  a  $\varphi''(1) = 4$ .

#### 4. Položme

$$F(x, y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$

Funkce  $F$  je definována na jisté otevřené množině  $G$  (lze ukázat, že dokonce  $G = \mathbf{R}^2$ ) obsahující bod  $[0,0]$  a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2x - \sin(xy) \cdot y), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2y - \sin(xy) \cdot x) + 1. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na  $G$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(G)$ . Dále platí  $F(0,0) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[0,0]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítáme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) &= 0, \\ \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))) + \varphi'(x) &= 0, \\ \frac{-1}{(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)))^2} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ + \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \\ - \cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))) + \varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 0$  a použijeme-li  $\varphi(0) = 0$ , dostaneme  $\varphi'(0) = 0$  a  $\varphi''(0) = -2$ .

#### 5. Položme

$$F(x, y) = \log(x + \arctg y + 1) + xy.$$

Funkce  $F$  je definována na jisté otevřené množině  $G$  obsahující bod  $[0,0]$  a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x + \arctg y + 1} + y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x + \arctg y + 1} \cdot \frac{1}{1 + y^2} + x. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na  $G$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(G)$ . Dále platí  $F(0,0) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[0,0]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace

vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \log(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1) + x\varphi(x) &= 0, \\ \frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) &= 0, \\ \frac{-1}{(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2 \\ + \frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2} \\ + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) &= 0, \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 0$  a použijeme-li  $\varphi(0) = 0$ , dostaneme  $\varphi'(0) = -1$  a  $\varphi''(0) = 2$ .

**6. Položme**

$$F(x, y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce  $F$  je definována na otevřené množině  $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , která obsahuje bod  $[1, 1]$ . Pro parciální derivace  $F$  platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= yx^{y-1} + y^x \log y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= x^y \log x + xy^{x-1} - 2. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na  $G$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(G)$ . Dále platí  $F(1, 1) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[1, 1]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepíšeme na tvar

$$e^{\varphi(x) \log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\varphi''(x) \log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 1$  a použijeme-li  $\varphi(1) = 1$ , dostaneme  $\varphi'(1) = 1$  a  $\varphi''(1) = 4$ . Položme

$$F(x, y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce  $F$  je definována na otevřené množině  $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , která obsahuje bod  $[1, 1]$ . Pro parciální derivace  $F$  platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= yx^{y-1} + y^x \log y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= x^y \log x + xy^{x-1} - 2. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na  $G$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(G)$ . Dále platí  $F(1, 1) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu

[1, 1] implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepíšeme na tvar

$$e^{\varphi(x) \log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left( \varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left( \log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left( \varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right)^2 + e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left( \varphi''(x) \log x + 2 \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \right) \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left( \log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)^2 \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left( \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} \right) - 2\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 1$  a použijeme-li  $\varphi(1) = 1$ , dostaneme  $\varphi'(1) = 1$  a  $\varphi''(1) = 4$ .

**7. Položme**

$$F(x, y) = y^3 x^2 + y^2 x^2 + \sin y.$$

Funkce  $F$  je definována na  $\mathbf{R}^2$ . Pro parciální derivace  $F$  platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y^3 x + 2y^2 x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 x^2 + 2yx^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na  $\mathbf{R}^2$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ . Dále platí  $F(0, 0) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[0, 0]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3 x^2 + \varphi(x)^2 x^2 + \sin \varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{aligned} 3\varphi(x)^2 \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^3 x + 2\varphi(x) \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^2 x + \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) &= 0, \\ 6\varphi(x) \varphi'(x) \varphi'(x) x^2 + 3\varphi(x)^2 \varphi''(x) x^2 + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) \\ + 2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x) \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x) \varphi''(x) x^2 + 4\varphi(x) \varphi'(x) x \\ + 4\varphi(x) \varphi'(x) x + 2\varphi(x)^2 - \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \varphi'(x) + \cos \varphi(x) \cdot \varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 0$  a použijeme-li  $\varphi(0) = 0$ , dostaneme  $\varphi'(0) = 0$  a  $\varphi''(0) = 0$ .

**8. Položme**

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce  $F$  je definována na  $\mathbf{R}^2$ . Pro parciální derivace  $F$  platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na  $\mathbf{R}^2$  spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj.  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ . Dále platí  $F(0, 0) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -2 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[0, 0]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která sama je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{aligned}
 & e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0, \\
 & e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2 \\
 & + e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\
 & - e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) - 2\varphi''(x) = 0.
 \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 0$  a použijeme-li  $\varphi(0) = 0$ , dostaneme  $\varphi'(0) = 0$  a  $\varphi''(0) = 1$ .

**9. Položme**

$$F(x, y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod  $[0, 0]$  je ve vnitřku definičního oboru funkce  $F$  – můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce  $F$  na jistém okolí  $G$  bodu  $[0, 0]$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}} \\
 \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.
 \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu  $[0, 0]$  spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj.  $f \in \mathcal{C}^2(G)$ . Dále platí  $F(0, 0) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$ . Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu  $[0, 0]$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ , která je třídy  $\mathcal{C}^2$ . Funkci označme  $\varphi$  a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned}
 & \arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) = 0, \\
 & \frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 - (x + (\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1 - (\varphi(x) + x^2)^2}} = 0, \\
 & -\frac{1}{2}(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x + (\varphi(x))^2)) \cdot (1 + 2\varphi(x)\varphi'(x))^2 \\
 & + (1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\
 & -\frac{1}{2}(1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x) + x^2)) \cdot (\varphi'(x) + 2x)^2 \\
 & + (1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x) + 2) = 0.
 \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $x = 0$  a využijeme-li  $\varphi(0) = 0$ , dostaneme  $\varphi'(0) = -1$  a  $\varphi''(0) = -4$ .

**10.** Rovnice tečné roviny:  $L(x, y) = -(x - 1) - (y - 1) + 1$ .      **11.**  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 1$   
**11.**  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 2) = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 2) = -1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 2) = -1/3$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 2) = 1/3$       **12.**  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = 1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = 0$ ,  
 $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) = 1$       **13.**  $\frac{\partial u}{\partial x}(e+1, e) = 1/(1+e)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}(e+1, e) = -e/(e+1)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(e+1, e) = 0$ ,  
 $\frac{\partial v}{\partial y}(e+1, e) = 1$